Einige (auf den ersten Blick) einfache Integrale über gebrochenrationale Funktionen

Das Ableiten einer gebrochenrationalen Funktion führt bekanntlich immer auch auf eine gebrochenrationale Funktion. Und auch beim Aufleiten stimmt das noch bei den allereinfachsten gebrochenrationalen Funktionen, nämlich Potenzfunktionen mit Exponenten kleiner als –1:

$$\int x^{-n} dx = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + C.$$

Aber schon beim Exponenten –1 erhält man bekanntlich eine kompliziertere Funktion, den natürlichen Logarithmus. Allerdings ist es in diesem Fall zumindest einfach, wenn man noch einen Summanden zusätzlich hat:

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C; \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$$

Wenn man im Nenner aber eine höhere Potenz hat und dann zusätzlich noch einen konstanten Summanden, werden die Integrale bereits *deutlich* schwieriger, und man muss i. A. auch noch unterscheiden, ob der Summand positiv oder negativ ist. Die beiden Fälle, in denen x quadratisch ist, sollten ja bekannt sein:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C; \quad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Für höhere Potenzen werden die entsprechenden Integrale dann zunehmend unangenehmer… Aber zumindest bei ungeraden Potenzen kommt es nicht auf das Vorzeichen des Summanden an. Unten stehen erst mal die Formeln bis zur sechsten Potenz; die Rechnungen dazu kommen dann auf den folgenden Seiten. Letztlich macht man alle Integrale auf dieselbe Weise: Nenner faktorisieren in lineare und quadratische Terme, dann Partialbruchzerlegung, dann die Formeln für lineare und quadratische Nenner von oben verwenden.

1) $$\int \frac{1}{x^3+a^3} dx = \frac{1}{3a^2} \ln\left(\frac{|x+a|}{\sqrt{x^2-ax+a}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}a|a|} \arctan\left(\frac{2x-a}{\sqrt{3}|a|}\right) + C$$

2a) $$\int \frac{1}{x^4-a^4} dx = \frac{1}{4a^3} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{1}{2a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

2b) $$\int \frac{1}{x^4+a^4} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}a^3} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}ax}{a^2-x^2}\right) + C$$

3) $$\int \frac{1}{x^5+a^5} dx = \frac{1}{5a^4} \ln|x+a| - \frac{\sqrt{5}+1}{20a^4} \ln\left(x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} ax + a^2\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{20a^4} \ln\left(x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} ax + a^2\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{10a^4} \sqrt{5-\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2a} \frac{4x-(1+\sqrt{5})a}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{10a^4} \sqrt{5+\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2a} \frac{4x-(1-\sqrt{5})a}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\right) + C$$

4a) $$\int \frac{1}{x^6-a^6} dx = \frac{1}{6a^5} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \frac{1}{12a^5} \ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{x^2+ax+a^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6a^5} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}ax}{a^2-x^2}\right) + C$$

4b) $$\int \frac{1}{x^6+a^6} dx = \frac{\sqrt{3}}{12a^5} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}ax+a^2}{x^2-\sqrt{3}ax+a^2}\right) + \frac{1}{3a^5} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{6a^5} \arctan\left(\frac{ax}{a^2-x^2}\right) + C$$

Man sieht wohl deutlich, dass man im Gegensatz zu den einfachen Integralen von Potenzen oben hier *keine* allgemeine Regel angeben kann.

1) Dritte Potenz

Den Nenner kann man mithilfe der Formelsammlung faktorisieren: $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$

Dann setzt man die Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{1}{x^3 + a^3} = \frac{A}{x + a} + \frac{Bx + C}{x^2 - ax + a^2}$$

Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner und Kürzen führt auf

$$1 = A(x^2 - ax + a^2) + (Bx + C)(x + a)$$

Leider hat man hier nur eine Definitionslücke, $x_1 = -a$. Setzt man diese ein, so erhält man $1 = A \cdot 3a^2 \Rightarrow A = \frac{1}{3a^2}$. Außerdem kann man z. B. noch x = 0 und x = a einsetzen; das führt auf $1 = A \cdot a^2 + C \cdot a \Rightarrow C = \frac{2}{3a}$, bzw. $1 = A \cdot a^2 + B \cdot 2a^2 + C \cdot 2a \Rightarrow B = -\frac{1}{3a^2}$. Insgesamt folgt damit

$$\frac{1}{x^3 + a^3} = \frac{1}{3a^2}\frac{1}{x + a} - \frac{1}{3a^2}\frac{x - 2a}{x^2 - ax + a^2}.$$

Den ersten Summanden kann man nun einfach integrieren. Im zweiten hat man noch das Problem, dass der Zähler nicht ganz gleich der Ableitung des Nenners ist. Das kann man sich aber passend hinbiegen, indem man erstens mit 2 erweitert und zweitens den konstanten Summanden (und danach dann den Bruch) passend zerlegt:

$$\frac{1}{x^3 + a^3} = \frac{1}{3a^2}\frac{1}{x + a} - \frac{1}{6a^2}\frac{2x - 4a}{x^2 - ax + a^2} = \frac{1}{3a^2}\frac{1}{x + a} - \frac{1}{6a^2}\frac{2x - a - 3a}{x^2 - ax + a^2}$$

$$= \frac{1}{3a^2}\frac{1}{x + a} - \frac{1}{6a^2}\frac{2x - a}{x^2 - ax + a^2} + \frac{1}{2a}\frac{1}{x^2 - ax + a^2}$$

Im letzten Bruch führt man nun noch eine quadratische Ergänzung durch und substituiert passend:

$$\frac{1}{x^3 + a^3} = \frac{1}{3a^2}\frac{1}{x + a} - \frac{1}{6a^2}\frac{2x - a}{x^2 - ax + a^2} + \frac{1}{2a}\frac{1}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a^2}$$

$$= \frac{1}{3a^2}\frac{1}{x + a} - \frac{1}{6a^2}\frac{2x - a}{x^2 - ax + a^2} + \frac{1}{2a}\frac{1}{u^2 + \frac{3a^2}{4}}$$

Jetzt können wir integrieren:

$$\int \frac{1}{x^3 + a^3}dx = \frac{1}{3a^2}\int \frac{1}{x + a}dx - \frac{1}{6a^2}\int \frac{2x - a}{x^2 - ax + a^2}dx + \frac{1}{2a}\int \frac{1}{u^2 + \frac{3a^2}{4}}du$$

$$= \frac{1}{3a^2}\ln|x + a| - \frac{1}{6a^2}\ln|x^2 - ax + a^2| + \frac{1}{2a}\frac{1}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}}}\right) + C$$

Resubstitution und Zusammenfassen führt dann auf das angegebene Ergebnis.

2a) Vierte Potenz, negativer Summand

Dieser Fall ist eigentlich relativ einfach – zumindest einfacher als Fall 1. Den Nenner kann man leicht faktorisieren durch zweifache Anwendung der dritten binomischen Formel:

$$x^4 - a^4 = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2) = (x^2 + a^2)(x + a)(x - a)$$

Also haben wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^4-a^4} = \frac{Ax+}{x^2+a^2} + \frac{C}{x+a} + \frac{D}{x-a} \Rightarrow 1 = (Ax + B)(x^2 - a^2) + C(x^2 + a^2)(x - a) + D(x^2 + a^2)(x + a)$$

Setzen wir erst mal die beiden Definitionslücken $x_{1,2} = \pm a$ ein, so folgt:

$$1 = D \cdot 2a^2 \cdot 2a \Rightarrow D = \frac{1}{4a^3} \text{ und } 1 = C \cdot 2a^2 \cdot (-2a) \Rightarrow C = -\frac{1}{4a^3}.$$

Außerdem können wir z. B. x = 0 einsetzen und erhalten

$$1 = B \cdot (-a^2) + C \cdot a^2 \cdot (-a) + D \cdot a^2 \cdot a \Rightarrow B = -\frac{1}{2a^2}.$$

Statt weitere x-Werte einzusetzen, multiplizieren wir nun die Klammern alle aus und betrachten nur die jeweils höchste Potenz auf der rechten Seite:

$$1 = Ax^3 + Cx^3 + Dx^3 + \cdots$$

Diese Gleichung kann nur dann für *alle* Werte von x richtig sein, wenn $A + C + D = 0$ gilt, und daraus folgt sofort $A = 0$. Also ist insgesamt

$$\frac{1}{x^4 - a^4} = -\frac{1}{2a^2}\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{4a^3}\frac{1}{x + a} + \frac{1}{4a^3}\frac{1}{x - a}$$

Alle Summanden können nun relativ einfach integriert werden:

$$\int \frac{1}{x^4 - a^4} dx = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx - \frac{1}{4a^3}\int \frac{1}{x + a} dx + \frac{1}{4a^3}\int \frac{1}{x - a} dx$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{4a^3}\ln|x + a| + \frac{1}{4a^3}\ln|x - a| + C,$$

und daraus folgt nach Zusammenfassen das angegebene Ergebnis.

Alternativ und *deutlich* schneller geht's übrigens auch so: Wir erweitern den Bruch zunächst mit a^2 und schreiben das a^2 im Zähler dann geschickt um als

$$a^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + a^2 - x^2 + a^2) = \frac{1}{2}((x^2 + a^2) - (x^2 - a^2))$$

und haben damit nach faktorisieren des Nenners

$$\int \frac{1}{x^4 - a^4} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{x^4 - a^4} dx = \frac{1}{2a^2}\int \frac{(x^2 + a^2) - (x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)} - \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx;$$

ab hier hat man nun wieder Standard-Integrale aus der Formelsammlung! (Auf diesen Trick bin ich nicht selbst gekommen, den habe ich aus einem YouTube-Video… siehe Fall 4a.)

2b) Vierte Potenz, positiver Summand

Der Nenner hat nun keine Nullstellen mehr, enthält also keine Linearfaktoren. Man kann ihn aber in ein Produkt von zwei quadratischen Faktoren zerlegen. Machen wir es uns einfach und setzen als Leitkoeffizienten der beiden quadratischen Faktoren jeweils 1 an, als konstante Summanden jeweils a^2, dann sind nur noch die Koeffizienten der beiden linearen Faktoren offen:

$$x^4 + a^4 = (x^2 + px + a^2)(x^2 + qx + a^2)$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt dies

$$x^4 + a^4 = x^4 + (p + q)x^3 + (pq + 2a^2)x^2 + (p + q)a^2x + a^4.$$

Damit beide Seiten für *alle* Werte von x gleich sind, müssen rechts die Summanden mit x^3, x^2 und x verschwinden, es muss also gelten: $p + q = 0$ und $pq + 2a^2 = 0$. Dieses Gleichungssystem hat zwei mögliche Lösungen ($p = a\sqrt{2}, q = -a\sqrt{2}$ oder $p = -a\sqrt{2}, q = a\sqrt{2}$), die aber nur zu unterschiedlichen Reihenfolgen der beiden quadratischen Faktoren in der Faktorisierung führen. Wir haben also

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a\sqrt{2}x + a^2)(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2)$$

und damit den Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^4 + a^4} = \frac{Ax + B}{x^2 + a\sqrt{2}x + a^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - a\sqrt{2}x + a^2}$$

bzw. nach Multiplizieren mit dem Hauptnenner schließlich

$$1 = (Ax + B)\left(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2\right) + (Cx + D)\left(x^2 + a\sqrt{2}x + a^2\right).$$

Multiplizieren wir die Klammern aus und nehmen nur die jeweils höchsten Potenzen mit, so haben wir zunächst

$$1 = (A + C)x^3 + \cdots$$

Das kann nur dann für *alle* Werte von x erfüllt sein, wenn $A + C = 0$ ist, also $C = -A$. Setzen wir dann nacheinander x = 0, x = a und x = –a ein, so erhalten wir

$$1 = Ba^2 + Da^2,$$

$$1 = (Aa + B)\left(2a^2 - a^2\sqrt{2}\right) + (-Aa + D)\left(2a^2 + a^2\sqrt{2}\right),$$

$$1 = (-Aa + B)\left(2a^2 + a^2\sqrt{2}\right) + (Aa + D)\left(2a^2 - a^2\sqrt{2}\right).$$

Dieses LGS zu lösen ist nun „etwas‘‘ aufwendiger. Zunächst sollte man in der zweiten und dritten Gleichung jeweils die Klammern auflösen und zusammenfassen,

$$1 = Ba^2 + Da^2,$$

$$1 = -2\sqrt{2}a^3A + B\left(2 - \sqrt{2}\right)a^2 + D\left(2 + \sqrt{2}\right)a^2,$$

$$1 = -2\sqrt{2}a^3A + B\left(2 + \sqrt{2}\right)a^2 + D\left(2 - \sqrt{2}\right)a^2.$$

Wenn man nun die zweite von der dritten Gleichung subtrahiert, bleibt

$$1 = Ba^2 + Da^2,$$

$$0 = 2\sqrt{2}a^2B - 2\sqrt{2}a^2D.$$

Dieses LGS ist nun einfach zu lösen (Tipp: zunächst die zweite Gleichung durch $2\sqrt{2}a^2$ teilen). Es bleibt schließlich $B = D = \frac{1}{2a^2}$, und wenn man noch in einer der Gleichungen oben einsetzt, $A = \frac{1}{2\sqrt{2}a^3}$. Also ist

$$\frac{1}{x^4+a^4}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}x+\frac{1}{2a^2}}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}x+\frac{1}{2a^2}}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\frac{x+\sqrt{2}a}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}-\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\frac{x-\sqrt{2}a}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}.$$

In beiden Nennern wird nun quadratisch ergänzt und dann jeweils passend substituiert,

$$\frac{1}{x^4+a^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\frac{x+\sqrt{2}a}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\frac{a^2}{2}+a^2}-\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\frac{x-\sqrt{2}a}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\frac{a^2}{2}+a^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\frac{u+\frac{\sqrt{2}}{2}a}{u^2+\frac{a^2}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\frac{v-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{v^2+\frac{a^2}{2}}.$$

Das kann nun relativ einfach integriert werden,

$$\int\frac{1}{x^4+a^4}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\int\frac{2u}{u^2+\frac{a^2}{2}}du+\frac{1}{4a^2}\int\frac{1}{u^2+\frac{a^2}{2}}du-\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\int\frac{2v}{v^2+\frac{a^2}{2}}dv+\frac{1}{4a^2}\int\frac{1}{v^2+\frac{a^2}{2}}dv$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\ln\left|u^2+\frac{a^2}{2}\right|+\frac{1}{4a^2}\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{u}{\frac{a}{\sqrt{2}}}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\ln\left|v^2+\frac{a^2}{2}\right|+\frac{1}{4a^2}\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{v}{\frac{a}{\sqrt{2}}}\right)+C.$$

Nach Resubstitution und Zusammenfassen hat man dann zunächst

$$\int\frac{1}{x^4+a^4}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x+a}{a}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x-a}{a}\right)$$
$$+C.$$

Für den Arcustangens gibt es aber auch noch das Additionstheorem

$$\arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

Damit kann man dann die letzten beiden Summanden noch zusammenfassen und erhält so das angegebene Ergebnis.

3) Fünfte Potenz

Das ist der schwierigste Fall von allen hier. Zunächst müssen wir den Nenner faktorisieren; da die eine Nullstelle x = –a offensichtlich ist, machen wir also erst mal eine Polynomdivision:

$$(x^5+a^5):(x+a)=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4.$$

Dieses Polynom vierten Grades hat nun leider keine Nullstellen, also können wir es nur als Produkt von zwei quadratischen Faktoren ansetzen. Wie bereits in (2b) wählen wir für beide Leitkoeffizienten jeweils 1 und für die beiden konstanten Summanden jeweils a^2,

$$x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4=(x^2+px+a^2)(x^2+qx+a^2).$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammern und Vergleich der Koeffizienten auf beiden Seiten erhalten wir dann das Gleichungssystem $p+q=-a,\ pq+2a^2=a^2$, was wie in (2b) wiederum zwei Lösungen hat, was aber wieder nur einen Einfluss auf die Reihenfolge der Faktoren hat. Letztlich erhalten wir nach einiger Rechnerei

$$x^5+a^5=(x+a)\left(x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}ax+a^2\right)\left(x^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}ax+a^2\right),$$

setzen also für die Partialbruchzerlegung an

$$\frac{1}{x^5+a^5}=\frac{A}{x+a}+\frac{Bx+C}{x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}ax+a^2}+\frac{Dx+E}{x^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}ax+a^2}$$

und haben dann nach Multiplizieren mit dem Hauptnenner

$$1=A\left(x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}ax+a^2\right)\left(x^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}ax+a^2\right)+(Bx+C)(x+a)\left(x^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}ax+a^2\right)$$
$$+(Dx+E)(x+a)\left(x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}ax+a^2\right).$$

Setzen wir die Definitionslücke x = –a ein, so erhalten wir hier $1=A\cdot 5a^4$, also $A=\frac{1}{5a^4}$. Für x = 0 ergibt sich die Gleichung $1=A\cdot a^4+C\cdot a^3+E\cdot a^3$, also $\frac{4}{5a^3}=C+E\ (I)$, aus dem Koeffizientenvergleich der höchsten Potenz dagegen $0=A+B+D$, also $-\frac{1}{5a^4}=B+D\ (II)$. Das sind leider erst zwei Gleichungen für vier Unbekannte, also machen wir noch weiter mit dem Koeffizientenvergleich. Aus den Koeffizienten von x^3 erhalten wir

$$0=-Aa+\frac{1+\sqrt{5}}{2}aB+C+\frac{1-\sqrt{5}}{2}aD+E,$$

woraus mit (I) dann

$$-\frac{3}{5a^4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}B+\frac{1-\sqrt{5}}{2}D$$

folgt und schließlich dann mit (II) $B=-\frac{\sqrt{5}+1}{10a^4}, D=\frac{\sqrt{5}-1}{10a^4}$. Aus den Koeffizienten von x ergibt sich

$$0=-Aa^3+Ba^3+\frac{1+\sqrt{5}}{2}Ca^2+Da^3+\frac{1-\sqrt{5}}{2}Ea^2,$$

und mit (II) erhalten wir

$$\frac{2}{5a^3}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}C+\frac{1-\sqrt{5}}{2}E;$$

mit (I) folgt dann $C = \frac{2}{5a^3}, E = \frac{2}{5a^3}$. Also haben wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^5+a^5} = \frac{1}{5a^4}\frac{1}{x+a} + \frac{-\frac{\sqrt{5}+1}{10a^4}x + \frac{2}{5a^3}}{x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}ax + a^2} + \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{10a^4}x + \frac{2}{5a^3}}{x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}ax + a^2}$$

$$= \frac{1}{5a^4}\frac{1}{x+a} - \frac{\sqrt{5}+1}{10a^4}\frac{x-(\sqrt{5}-1)a}{x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}ax + a^2} + \frac{\sqrt{5}-1}{10a^4}\frac{x+(\sqrt{5}+1)a}{x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}ax + a^2}$$

$$= \frac{1}{5a^4}\frac{1}{x+a} - \frac{\sqrt{5}+1}{20a^4}\frac{2x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a}{x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}ax + a^2} + \frac{5-\sqrt{5}}{20a^3}\frac{1}{x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}ax + a^2}$$
$$+ \frac{\sqrt{5}-1}{20a^4}\frac{2x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a}{x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}ax + a^2} + \frac{5+\sqrt{5}}{20a^3}\frac{1}{x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}ax + a^2}$$

$$= \frac{1}{5a^4}\frac{1}{x+a} - \frac{\sqrt{5}+1}{20a^4}\frac{2x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a}{x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}ax + a^2} + \frac{5-\sqrt{5}}{20a^3}\frac{1}{u^2 + \frac{5-\sqrt{5}}{8}a^2} + \frac{\sqrt{5}-1}{20a^4}\frac{2x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a}{x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}ax + a^2}$$
$$+ \frac{5+\sqrt{5}}{20a^3}\frac{1}{v^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{8}a^2}$$

(Vorsicht: Hier wurden viele Zwischenschritte ausgelassen, jeder einzelne Schritt erfordert einiges an Nebenrechnungen!)

Nach Integrieren und Resubstitution haben wir dann

$$\int \frac{1}{x^5+a^5}dx = \frac{1}{5a^4}\ln|x+a| - \frac{\sqrt{5}+1}{20a^4}\ln\left|x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}ax + a^2\right| + \frac{\sqrt{5}-1}{20a^4}\ln\left|x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}ax + a^2\right|$$
$$+ \frac{5-\sqrt{5}}{20a^3}\frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}a}\arctan\left(\frac{x - \frac{1+\sqrt{5}}{4}a}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}a}\right) + \frac{\sqrt{5}+5}{20a^3}\frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}\arctan\left(\frac{x - \frac{1-\sqrt{5}}{4}a}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}a}\right),$$

und das kann man zum angegebenen Ergebnis zusammenfassen.

4a) Sechste Potenz, negativer Summand

Die Faktorisierung scheint hier zunächst schwierig zu sein. Man kann aber einfach die dritte binomische Formel verwenden: $x^6 - a^6 = (x^3 + a^3)(x^3 - a^3)$. Die Terme dritten Grades faktorisiert man dann wieder mittels der Formelsammlung, wie in (1), und erhält schließlich

$$x^6 - a^6 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)(x - a)(x^2 + ax + a^2).$$

Die Partialbruchzerlegung hat also die Form

$$\frac{1}{x^6 - a^6} = \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x - a} + \frac{Cx + D}{x^2 + ax + a^2} + \frac{Ex + F}{x^2 - ax + a^2}$$

bzw. nach Durchmultiplizieren

$$\begin{aligned} 1 = {} & A(x - a)(x^2 + ax + a^2)(x^2 - ax + a^2) + B(x + a)(x^2 + ax + a^2)(x^2 - ax + a^2) \\ & + (Cx + D)(x^2 - a^2)(x^2 - ax + a^2) + (Ex + F)(x^2 - a^2)(x^2 + ax + a^2) \end{aligned}$$

Setzen wir zunächst die Definitionslücken x = a und x = –a ein, so bleibt

$$1 = B \cdot 2a \cdot 3a^2 \cdot a^2, \quad 1 = A \cdot (-2a) \cdot a^2 \cdot 3a^2,$$

also $A = -\frac{1}{6a^5}, B = \frac{1}{6a^5}$. Einsetzen von x = 0 führt auf

$$1 = A \cdot (-a^5) + B \cdot a^5 + D \cdot (-a^4) + F \cdot (-a^4),$$

also $-\frac{2}{3a^4} = D + F$, Ausmultiplizieren der Klammern dagegen auf

$$1 = Ax^5 + Bx^5 + Cx^5 + Ex^5 + \cdots,$$

also letztlich $0 = C + E$. Damit haben wir leider immer noch erst zwei Gleichungen für vier Variablen… Nehmen wir also erst mal noch die nächsthöhere Potenz mit beim Ausmultiplizieren der Klammern,

$$1 = 0x^5 - aAx^4 + aBx^4 - aCx^4 + aEx^4 + Dx^4 + Fx^4 + \cdots,$$

was auf $\frac{1}{3a^5} = E - C$ führt; damit erhalten wir $C = -\frac{1}{6a^5}, E = \frac{1}{6a^5}$. Außerdem können wir noch alle linearen Summanden betrachten, die nach dem Ausmultiplizieren der Klammern übrigbleiben,

$$1 = \cdots + Aa^4x + Ba^4x - Ca^4x + Da^3x - Ea^4x - Fa^3x + \cdots,$$

was auf $0 = D - F$ führt; damit erhalten wir $D = F = -\frac{1}{3a^4}$. Die Partialbruchzerlegung ist somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^6 - a^6} &= \frac{-\frac{1}{6a^5}}{x + a} + \frac{\frac{1}{6a^5}}{x - a} + \frac{-\frac{1}{6a^5}x - \frac{1}{3a^4}}{x^2 + ax + a^2} + \frac{\frac{1}{6a^5}x - \frac{1}{3a^4}}{x^2 - ax + a^2} \\ &= -\frac{1}{6a^5}\frac{1}{x + a} + \frac{1}{6a^5}\frac{1}{x - a} - \frac{1}{6a^5}\frac{x + 2a}{x^2 + ax + a^2} + \frac{1}{6a^5}\frac{x - 2a}{x^2 - ax + a^2}. \end{aligned}$$

Die beiden hinteren Brüche werden erst wieder passend erweitert und zerlegt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^6 - a^6} = {} & -\frac{1}{6a^5}\frac{1}{x + a} + \frac{1}{6a^5}\frac{1}{x - a} - \frac{1}{12a^5}\frac{2x + a}{x^2 + ax + a^2} - \frac{1}{4a^4}\frac{1}{x^2 + ax + a^2} + \frac{1}{12a^5}\frac{2x - a}{x^2 - ax + a^2} \\ & - \frac{1}{4a^4}\frac{1}{x^2 - ax + a^2}, \end{aligned}$$

dann führt man mal wieder jeweils eine quadratische Ergänzung und passende Substitution durch,

$$\frac{1}{x^6-a^6} = -\frac{1}{6a^5}\frac{1}{x+a} + \frac{1}{6a^5}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{12a^5}\frac{2x+a}{x^2+ax+a^2} - \frac{1}{4a^4}\frac{1}{u^2+\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{12a^5}\frac{2x-a}{x^2-ax+a^2}$$
$$-\frac{1}{4a^4}\frac{1}{v^2+\frac{3a^2}{4}}.$$

Dann kann man endlich integrieren und danach resubstituieren,

$$\int \frac{1}{x^6-a^6}dx = -\frac{1}{6a^5}\ln|x+a| + \frac{1}{6a^5}\ln|x-a| - \frac{1}{12a^5}\ln|x^2+ax+a^2| + \frac{1}{12a^5}\ln|x^2-ax+a^2|$$
$$-\frac{1}{4a^4}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\arctan\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\right) - \frac{1}{4a^4}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\arctan\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\right) + C.$$

Nach Zusammenfassen, wobei auch wieder das Additionstheorem aus (2b) verwendet wird, bleibt das angegebene Ergebnis.

Wieder geht es auch *deutlich* schneller… wie in Fall 2a erweitert man und schreibt dann den Zähler geschickt um,

$$\int \frac{1}{x^6-a^6}dx = \frac{1}{2a^3}\int \frac{(x^3+a^3)-(x^3-a^3)}{(x^3+a^3)(x^3-a^3)}dx = \cdots = \frac{1}{2a^3}\int \frac{1}{x^3-a^3}dx - \frac{1}{2a^3}\int \frac{1}{x^3+a^3}dx;$$

hier kann man dann das Ergebnis aus Fall 1 einsetzen. Diesen Trick habe ich dem folgenden Video entnommen:

https://www.youtube.com/watch?v=fZov2OJl03Q

4b) Sechste Potenz, positiver Summand

Hier wird schon das Faktorisieren extrem unübersichtlich, weil der Nenner wieder keine Nullstellen hat. Wir setzen an, dass wir ihn als das Produkt von drei quadratischen Faktoren schreiben können, wobei wir wieder die Leitkoeffizienten und die konstanten Summanden jeweils so einfach wie möglich wählen,

$$x^6 + a^6 = (x^2 + px + a^2)(x^2 + qx + a^2)(x^2 + rx + a^2).$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich führt hier auf das Gleichungssystem $p + q + r = 0,\ pq + pr + qr + 3a^2 = 0, pa^2 + qa^2 + ra^2 + pqr = 0$. Das sieht erst mal kaum lösbar aus… Schauen wir uns an, was in (2b) herauskam: Da hatten wir $q = -p$; versuchen wir doch mal, ob das hier auch funktioniert! Aus der ersten Gleichung erhalten wir dann sofort $r = 0$, die dritte ist automatisch auch erfüllt, und die zweite wird zu $-p^2 + 3a^2 = 0$. Also ist eine mögliche Lösung $p = \sqrt{3}a, q = -\sqrt{3}a, r = 0$, und eine der Lösungen genügt uns ja! (Die anderen Lösungen führen letztlich übrigens wieder nur auf eine andere Reihenfolge der Faktoren.) Also ist

$$x^6 + a^6 = \left(x^2 + \sqrt{3}ax + a^2\right)\left(x^2 - \sqrt{3}ax + a^2\right)(x^2 + a^2),$$

die Partialbruchzerlegung folgt zu

$$\frac{1}{x^6 + a^6} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{3}ax + a^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{3}ax + a^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + a^2},$$

und nach Durchmultiplizieren bleibt

$$1 = (Ax + B)\left(x^2 - \sqrt{3}ax + a^2\right)(x^2 + a^2) + (Cx + D)\left(x^2 + \sqrt{3}ax + a^2\right)(x^2 + a^2)$$
$$+(Ex + F)((x^2 + a^2)^2 - 3a^2x^2).$$

Einsetzen von x = 0 führt hier auf $1 = B \cdot a^4 + D \cdot a^4 + F \cdot a^4\ (I)$, Ausmultiplizieren und Berücksichtigen nur des höchsten Exponenten ergibt $0 = A + C + E\ (II)$. Wir haben also gerade mal zwei Gleichungen für insgesamt sechs Unbekannten, und Definitionslücken, die wir einsetzen könnten, gibt es auch nicht. Es bleibt nur, wie in (4a), alles auszumultiplizieren und jeweils die Koeffizienten zu vergleichen. Das führt bei den Koeffizienten von x^4, x^3, x^2 und x dann auf die Gleichungen

$$0 = -\sqrt{3}aA + B + \sqrt{3}aC + D + F\ (III)$$

$$0 = 2a^2A - \sqrt{3}aB + 2a^2C + \sqrt{3}aD - a^2E\ (IV)$$

$$0 = -\sqrt{3}a^3A + 2a^2B + \sqrt{3}a^3C + 2a^2D - a^2F\ (V)$$

$$0 = a^4A - \sqrt{3}a^3B + a^4C + \sqrt{3}a^3D + a^4E\ (VI)$$

Aus (III) folgt mit (I) schnell $\frac{1}{\sqrt{3}a^5} = A - C$ (VII), aus (VI) mit (II) dagegen $B = D$. Setzen wir das letztere Ergebnis in (IV) ein, dann bleibt $0 = 2A + 2C - E$, woraus sich wieder mit (II) dann $A + C = 0$ und $E = 0$ ergibt. Mit (VII) erhalten wir dann $A = \frac{1}{2\sqrt{3}a^5}, C = -\frac{1}{2\sqrt{3}a^5}$. Setzen wir alles bisher Berechnete schließlich in (V) ein, folgt $\frac{1}{a^4} = 4B - F$, woraus sich dann mit (I) schließlich $B = \frac{1}{3a^4}, D = \frac{1}{3a^4}, F = \frac{1}{3a^4}$ ergibt. Also ist

$$\frac{1}{x^6 + a^6} = \frac{1}{2\sqrt{3}a^5}\frac{x + \frac{2\sqrt{3}}{3}a}{x^2 + \sqrt{3}ax + a^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}a^5}\frac{x - \frac{2\sqrt{3}}{3}a}{x^2 - \sqrt{3}ax + a^2} + \frac{1}{3a^4}\frac{1}{x^2 + a^2}.$$

Weiter geht es in den beiden vorderen Brüchen mit den üblichen Schritten…

$$\frac{1}{x^6+a^6}=\frac{1}{4\sqrt{3}a^5}\frac{2x+\sqrt{3}a}{x^2+\sqrt{3}ax+a^2}+\frac{1}{12a^4}\frac{1}{x^2+\sqrt{3}ax+a^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}a^5}\frac{2x-\sqrt{3}a}{x^2-\sqrt{3}ax+a^2}$$
$$+\frac{1}{12a^4}\frac{1}{x^2-\sqrt{3}ax+a^2}+\frac{1}{3a^4}\frac{1}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}a^5}\frac{2x+\sqrt{3}a}{x^2+\sqrt{3}ax+a^2}+\frac{1}{12a^4}\frac{1}{u^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{1}{2\sqrt{3}a^5}\frac{2x-\sqrt{3}a}{x^2-\sqrt{3}ax+a^2}+\frac{1}{12a^4}\frac{1}{v^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{3a^4}\frac{1}{x^2+a^2}.$$

Nach Integrieren und Resubstituieren haben wir dann

$$\int\frac{1}{x^6+a^6}\,dx=\frac{1}{4\sqrt{3}a^5}\ln\left|x^2+\sqrt{3}ax+a^2\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}a^5}\ln\left|x^2-\sqrt{3}ax+a^2\right|$$

$$+\frac{1}{12a^4}\frac{1}{\frac{a}{2}}\arctan\left(\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}}\right)+\frac{1}{12a^4}\frac{1}{\frac{a}{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}}\right)+\frac{1}{3a^4}\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

Wieder verwendet man das Additionstheorem für den Arcustangens zum Zusammenfassen des dritten und vierten Summanden und erhält so schließlich das angegebene Ergebnis.

Unbestimmte Integrale über Funktionen dieses Typs

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^x}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,dt + \int_1^\infty \frac{1}{1+t^x}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,dx + \int_1^0 \frac{1}{1+z^{-x}}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-(-t^x)}\,dt + \int_0^1 \frac{z^{x-2}}{1-(-z^x)}\,dz$$

(umschreiben des zweiten Integrals ist nötig, damit die Reihe konvergiert)

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-t^x)^n\,dt + \int_0^1 z^{x-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z^x)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{xn}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 z^{xn+x-2}\,dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{xn+}}{xn+1}\right]_0^1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{z^{xn+x-1}}{xn+x-1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{xn+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x(n+1)-1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{xn+1} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{xm-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{xn+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{xn-1}$$

Dies ist nun eine Funktion mit unendlich vielen Polstellen, bei $x = \pm\frac{1}{n}$, und ohne Nullstellen. Also sollte man sie schreiben können als einen Quotienten einer Funktion ohne Nullstellen und einer Funktion, welche die unendlich vielen Nullstellen $x = \pm\frac{1}{n}$ hat. Als Funktion für den Nenner bietet sich $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ an – allerdings hätte diese Funktion dann die Polstelle x = 0, und müsste der Quotient insgesamt gegen 0 gehen für x gegen 0. Diese Polstelle müssen wir weg-kürzen (stetig behebbare Definitionslücke), wir setzen also an:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{xn+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{xn-1} = \frac{\frac{A}{x}}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$$

Es bleibt nur noch, die Konstante A zu bestimmen (und dann zu zeigen, dass der Ausdruck auch wirklich an allen Polstellen stimmt).

Setze dafür zunächst abkürzend h = π/x, dann haben wir

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\frac{\pi}{h}n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\frac{\pi}{h}n-1} = \frac{\frac{A}{\pi/h}}{\sin(h)},$$

also

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h}{\pi n+h} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h}{\pi n-h} = \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^{-1} \quad (*)$$

Für h gegen 0 geht die linke Seite gegen 1, die rechte gegen $\frac{A}{\pi}$ (wegen $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$, was wir in der 12. Klasse im Additum schon gesehen haben); also folgt $A = \pi$. Damit stimmen die beiden Terme schon mal für u gegen 0 (also x gegen unendlich) überein. Bei den anderen Nullstellen des Nenners kann man ähnlich vorgehen. Multiplizieren wir beide Seiten von (*) mit $\pi j - h$

$$\pi j - h + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\pi j - h)}{\pi n + h} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\pi j - h)}{\pi n - h} = \frac{h\cdot(\pi j - h)}{\sin(h)}$$

Die zweite Summe enthält für beliebige natürlich j sicher einen Summanden mit j = n, also können wir schreiben

$$\pi j - h + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\pi j - h)}{\pi n + h} - \sum_{n=1, n\neq j}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\pi j - h)}{\pi n - h} - (-1)^j \frac{h(\pi j - h)}{\pi j - h} = \frac{h\cdot(\pi j - h)}{\sin(h)}$$

Wegen der Symmetrie und Periodizität der Sinusfunktion ist außerdem $\sin(h) = -\sin(-h) = -(-1)^j \sin(\pi j - h)$, also

$$\pi j - h + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\pi j - h)}{\pi n + h} - \sum_{n=1, n \neq j}^{\infty} (-1)^n \frac{h(\pi j - h)}{\pi n - h} - (-1)^j h = -h \cdot (-1)^j \frac{(\pi j - h)}{\sin(\pi j - h)}$$

Die linke Seite geht gegen $-(-1)^j \pi j$, wenn h gegen πj geht. Auf der rechten Seite können wir abkürzend z = $\pi j - h$ setzen und haben dann $-(\pi j - z) \cdot (-1)^j \left(\frac{\sin(z)}{z}\right)^{-1}$. Der Grenzwert h gegen πj entspricht dann z gegen 0, und dafür geht dieser Term dann ebenfalls gegen $-\pi j \cdot (-1)^j$, wie die rechte Seite. Damit ist gezeigt, dass die linke und die rechte Seite von (*) an *allen* Polstellen übereinstimmen.

Wieso sollte es auch überall dazwischen übereinstimmen?

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^x} dt = \frac{\frac{\pi}{x}}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}$$

inspiriert von: https://www.youtube.com/watch?v=m1x-xsvdYCQ

https://www.youtube.com/watch?v=qoEM5aZ_ysg

https://proofwiki.org/wiki/Mittag-Leffler_Expansion_for_Cosecant_Function